**Exercice 1** 1. Montrer que, si $X$ est une variable réelle, $\mathbb{E}\left\{(X-\mathbb{E}(X))^2\right\} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

▶ **Corrigé:**

*Il s'agit d'un rappel.*

*On développe le carré et l'on utilise la linéarité de l'espérance pour obtenir*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{(X-\mathbb{E}(X))^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2\right\} \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.\end{aligned}$$

◀

2. Montrer que si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

En déduire que la matrice symétrique $\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice positive (i.e. $x.\Gamma x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$).

▶ **Corrigé:**

*Là aussi, il s'agit d'un rappel.*

*Le plus simple est d'introduire les variables centrées $\tilde{X}_i = X_i - \mathbb{E}(X_i)$. On a alors $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}\left\{\tilde{X}_i \tilde{X}_j\right\}$. On utilise la linéarité de l'espérance.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) &= \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{X}_i\right)^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \tilde{X}_i \tilde{X}_j\right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}\left\{\tilde{X}_i \tilde{X}_j\right\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \lambda.\Gamma\lambda.\end{aligned}$$

*La matrice $\Gamma$ est par définition symétrique et forcément positive puisque*

$$x.\Gamma x = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i\right) \geq 0.$$

◀

3. Montrer que la matrice de covariance est dégénérée (i.e. elle admet un noyau non réduit à $\{0\}$) si et seulement si le vecteur $X$ prend ses valeurs dans un hyperplan affine strict de $\mathbb{R}^n$.

▶ **Corrigé:**

*Si $\Gamma$ est non inversible, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\Gamma\lambda = 0$, on a donc $\mathrm{Var}\ \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \lambda.\Gamma\lambda = 0$. Soit $\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{X}_i\right)^2\right\} = 0$. La variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{X}_i$ est donc nulle presque sûrement. On a donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{E}(X_i)$.* ◀

4. Soit $\rho$ un nombre réel compris entre $-1$ et $1$, à quelle condition sur $\rho$ la matrice $\Gamma$, $n \times n$ suivante

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \ldots & \rho \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \ldots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

peut elle être la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire ?

▶ **Corrigé:**
*$\Gamma$ s'écrit sous la forme $\Gamma = (1-\rho)I + \rho J$ où $I$ est la matrice identité et $J$ la matrice dont tous les termes sont égaux à 1.*
*Le noyau de $J$ se détermine facilement, c'est l'hyperplan $x_1 + \cdots + x_n = 0$ et un vecteur orthogonal $(1, \ldots, 1)$ à cet hyperplan est (forcément) un vecteur propre. Il est associé à la valeur propre $n$.*
*Pour étudier la positivité de la matrice $\Gamma$, il suffit de calculer ses valeurs propres et de vérifier qu'elles sont positives. Vu ce qui précéde, les valeurs propres de $\Gamma$ sont $1-\rho$ et $1-\rho+n\rho$, qui sont positives si et seulement si*

$$-\frac{1}{n-1} \leq \rho \leq 1.$$

◀

5. On suppose $\rho \geq 0$ et on considère $(G_1, \ldots, G_n, G)$, $n+1$ variables aléatoires indépendantes centrées de variance 1. Comment construire un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ qui a pour matrice de variance covariance $\Gamma$ ?

   ▶ **Corrigé:**
   *Il suffit de poser $X_i = \sqrt{1-\rho}G_i + \sqrt{\rho}G$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ et $\mathbb{E}(X_i X_j) = \rho$, c'est à dire le résultat attendu.*
   *Lorsque $-\frac{1}{n-1} \leq \rho < 0$, on doit procéder autrement. C'est un peu plus compliqué. On peut prendre une "racine carrée" $A$ de $\Gamma$ et poser $X = A \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}$. Un calcul simple de variance permet de vérifier que $X$ convient.*
   *Lorsque $\rho < -\frac{1}{n-1}$, c'est bien sûr impossible !* ◀

**Exercice 2** Soit un couple de variables aléatoires $(X, Y)$ tel que $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$ [1].

1. Si $X$ et $Y$ representent des rendements de portefeuille, laquelle de ces deux variables aléatoires vous paraît naturellement préférable ?

   ▶ **Corrigé:**
   *Evidemment, un intervenant rationnel choisira le rendement qui est toujours le plus grand, c'est à dire $Y$ plutôt que $X$.* ◀

2. Donner un exemple de couple de variables aléatoires $(X, Y)$ tel que $X \leq Y$ p.s., avec (bien sûr !) $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$, mais telles que $\text{Var}\,(X) < \text{Var}\,(Y)$.
   Ces deux variables aléatoires *ne seront pas comparables pour l'ordre partiel sur les gains de portefeuille* défini dans le cours [2].

   ▶ **Corrigé:**
   *Le plus simple est de poser $X = \rho Y$ avec $0 \leq \rho < 1$. On a alors $\mathbb{E}(X) = \rho\mathbb{E}(Y) < \mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}\,(X) = \rho^2 \text{Var}\,(Y) < \text{Var}\,(Y)$.* ◀

3. En quoi cela questionne t'il le choix de l'ordre partiel introduit dans la modélisation du portefeuille proposée par Markowitz ?

---

1. Remarquez que pour savoir si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, il faut connaître la loi du couple $(X, Y)$.
2. Notez que cet ordre partiel ne suppose la connaissance que de la loi de $X$ et de celle de $Y$ (et non celle du couple $(X, Y)$ comme précédemment).

▶ **Corrigé:**
*Dans l'exemple précedent, $Y$ est toujours plus grand que $X$ mais dans la méthodologie de Markowitz, on ne choisit pas entre ces deux possibilités, ce qui est paradoxal.*

*Ceci s'explique car la méthodologie de Markowitz s'appuie sur la connaissance de la loi de $X$ et de $Y$* seulement *en considérant que l'on n'a pas accès à la façon dont $X$ et $Y$ sont corrélés. C'est discutable même si cela a la vertu de la simplicité.*

*L'ordre proposé par Markowitz est largement arbitraire. Il a été largement discuté. On peut par exemple remplacer la* Var *par un autre critère comme la CVar. Ce qui ne régle qu'un partie des problèmes évoqués ici ...* ◀

**Exercice 3** Soit $\Gamma$ une matrice symétrique définie positive. Montrer que $\phi(x, y) = x^T \Gamma y$ est un produit scalaire. On note $\|x\|_\Gamma = \sqrt{x^T \Gamma x}$ la norme associée.

1. (Re)-démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|x^T \Gamma y| \leq \|x\|_\Gamma \|y\|_\Gamma$$

▶ **Corrigé:**
*C'est un résultat bien connu. On peut en rappeler la preuve. On a pour tout $\lambda$*

$$0 \leq (x + \lambda y)^T \Gamma (x + \lambda y) = x^T \Gamma x + 2\lambda(x^T \Gamma y) + \lambda^2 y^T \Gamma y.$$

*On écrit alors que le déterminant du trinôme est négatif, ce qui donne le résultat. Pour avoir égalité le determinant précédent doit être nul et il faut aussi qu'il existe $\lambda$ tel que $x + \lambda y = 0$. Les seuls cas d'égalité sont donc obtenus lorsque $x$ et $y$ sont colinéaires.* ◀

2. En déduire que :

$$r^T \lambda \leq \sqrt{r^T \Gamma^{-1} r} \times \sqrt{\lambda^T \Gamma \lambda}.$$

Puis que

$$\sup_{\lambda, \sum_{i=1}^d \lambda_i = 1} \frac{r^T \lambda}{\sqrt{\lambda^T \Gamma \lambda}} \leq \sqrt{r^T \Gamma^{-1} r}$$

et que l'égalité est atteinte pour $\lambda = \Gamma^{-1} r / (\mathbf{1}\, \Gamma^{-1} r)$ où $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$

▶ **Corrigé:**
*La première égalité s'obtient en prenant $x = \Gamma^{-1} r$ et $y = \lambda$ dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz.*

*On en déduit facilement la deuxième inégalité. En utilisant la caractèrisation des cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que l'égalité est atteinte si $\lambda = c\Gamma^{-1} r$. Si l'on impose $\sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$, on obtient la formule demandée.* ◀